

А.В.ВОРОПАЙ, канд. техн. наук, доцент, ХНАДУ, Харьков

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С АМОРТИЗАТОРОМ

Механічна система складається з прямокутної пластини середньої товщини шарнірно-опертою по контуру та погашувача коливань. На пластину діє нестационарне навантаження, що збуджує коливання. Викладаються результати розв'язку задачі ідентифікації невідомого навантаження. Розрахунки зводяться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, які розв'язуються чисельно з використанням метода регуляризації А.М.Тихонова.

Mechanical system consists of hingedly supported medium-thickness rectangular plate and vibration absorber. The non-stationary concentrated load, which initiates vibration, is acting on the plate. The results of unknown load's identification are presented. The problems are reduced to the system of first-kind Volterra integral equations, which is solved numerically with using of Tikhonov's regularization method.

Механическая система состоит из прямоугольной пластины средней толщины шарнирно опертой по контуру и гасителя колебаний. На пластину действует нестационарная нагрузка, вызывающая колебания. Изложены результаты решения задачи идентификации неизвестной нагрузки. Расчеты сводятся к анализу системы интегральных уравнений Вольтерра I рода, которые решаются численно с использованием метода регуляризации А.М.Тихонова.

Введение. Гашение колебаний (особенно нестационарных) является важным направлением задач виброзащиты элементов конструкций. Актуальность указанных задач в настоящее время несомненна. При необходимости гашения колебаний уже созданных элементов конструкций используют различные управляемые и неуправляемые устройства – гасители колебаний (vibration absorbers). Наиболее известными и распространенными устройствами являются амортизаторы, которые широко распространены во всех отраслях машиностроения, в частности, в автомобилестроении.

Упомянем некоторые работы, связанные с пластинчатыми элементами конструкций. В работе [1] рассмотрен активный гаситель колебаний для изгибающейся пластинки, который контактирует с ней по границе, однако сама пластина представлена, по сути, в виде колеблющейся массы. В работе [2] рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с «дискретным динамическим гасителем» с использованием метода конечных элементов.

В настоящей работе рассматриваются нестационарные колебания механической системы, состоящей из прямоугольной пластины, на которой в некоторой точке установлен амортизатор. Для решения подобных задач удобно использовать следующий подход – воздействие амортизатора на пластину моделируется в виде неизвестной нестационарной силы, приложенной к пластине в месте установки гасителя. Тогда задача сводится к идентификации этой неизвестной нагрузки, определяемой на базе теории интегральных уравнений Вольтерра, что позволяет получить аналитико-численное решение.

1. Постановка задачи. Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и амортизатора, контактирующего с пластиной в некоторой точке (рис. 1). Считается, что амортизатор установлен ортогонально срединной плоскости пластины, а перемещение его штока полностью совпадает с изменением прогиба пластины в точке, где он находится, то есть $w_D(t) = w(x_D, y_D, t)$. Сила сопротивления амортизатора пропорциональна скорости его штока:

$$R(t) = \kappa \cdot \frac{dw_D(x_D, y_D, t)}{dt},$$

где κ – коэффициент демпфирования.

На пластину в некоторой точке действует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания пластины с амортизатором. В прямой задаче требуется определить компоненты перемещения во времени точек пластины (прогибы и углы поворота нормали).

При решении задачи предполагалось, что координаты точек приложения нагрузки и координаты установки амортизатора произвольны (любые точки, принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе). Также считалась известной величина коэффициента демпфирования.

2. Решение прямой задачи. В рамках теории пластин С. П. Тимошенко система дифференциальных уравнений [3], которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине с установленным на ней гасителем колебаний, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + R(t)\delta(x - x_D)\delta(y - y_D); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2}[(1 - \nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1 + \nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}; \\ w(x_D, y_D, t) = \int_0^t \frac{R(\tau)}{\kappa} d\tau, \end{array} \right. \quad (1)$$

где h – толщина пластины; $G' = k'G$; k' – коэффициент сдвига; $I = h^3/12$; w – прогиб срединной плоскости пластины; ψ_x, ψ_y – углы поворота; ρ, E, ν – упругие постоянные материала пластины; t – время, $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$;

$$\psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \varphi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

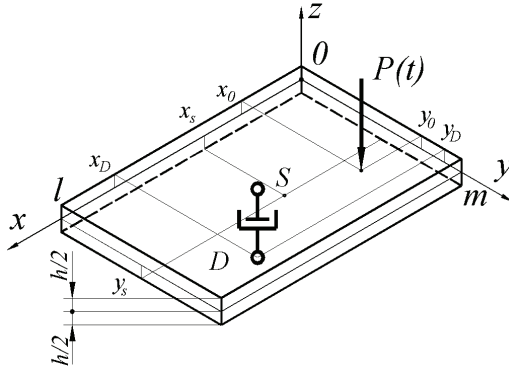


Рисунок 1 – Схема нагружения

Укажем, что $P(x,y,t)$ и $R(t)$ – возмущающая нагрузка (сосредоточенная или распределенная) и реакция взаимодействия между пластиной и амортизатором соответственно.

Система дифференциальных уравнений (1) в предположении нулевых начальных условий решается посредством разложения искомых функций w_0 , ψ_x , ψ_y в двойные ряды Фурье согласно рассмотренной схеме опирания. Воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой выполняется прямое интегральное преобразование Лапласа; в пространстве изображений находятся искомые коэффициенты разложения; производится обратное преобразование Лапласа. Решение задач для прямоугольных пластин, на которые воздействует система нескольких независимых нестационарных нагрузок, описано, например, в [4]. В результате решения получаются следующие аналитические выражения:

$$w(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau; \quad (2)$$

$$\psi_x(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K_i^{\psi_x}(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^{\psi_x}(x, y, t - \tau) d\tau;$$

$$\psi_y(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K_i^{\psi_y}(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^{\psi_y}(x, y, t - \tau) d\tau,$$

где $K_i(x,y,t)$ – соответствующие ядра интегралов Дюамеля (сверток):

$$K_i^W(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn} t;$$

$$K_i^{\psi_x}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}};$$

$$K_i^{xy}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}.$$

В приведенных соотношениях использованы следующие обозначения:

$$a = \frac{G'}{\rho}; \quad b = \frac{G' h}{\rho \cdot J}; \quad d = \frac{D}{\rho \cdot J}; \quad \lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}; \quad \mu_n^* = \pi \frac{n}{m}; \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right);$$

$$C_{ikn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m}; \quad \Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2 (a + d) + b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4};$$

$$\Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn} = -\omega_{2kn} + \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}}.$$

Аналитические выражения для определения собственных частот имеют вид:

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0,5[(\lambda_{kn}^2 (a + d) + b) + \Delta_{kn}]}; \quad \omega_{2kn} = \sqrt{0,5[(\lambda_{kn}^2 (a + d) + b) - \Delta_{kn}]}. \quad (3)$$

Проблема заключается в идентификации закона изменения во времени неизвестной реакции $R(t)$, для определения которой выражение (2) для точки установки амортизатора (x_{D3}, y_D) может быть сведено к интегральному уравнению Вольтерра I рода относительно неизвестной $R(\tau)$:

$$\int_0^t R(\tau) \left[K_R(t - \tau) + \frac{1}{\kappa} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau. \quad (3)$$

Решение уравнения осуществляется с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [5] (РА Тихонова) в силу некорректности задачи. В результате решения находится сила взаимодействия между гасителем и пластиной $R(t)$, что позволяет определять компоненты перемещения во времени во всех точках пластины.

3. Решение обратной задачи. В случае когда требуется определить неизвестный закон изменения во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ необходимо знать изменение прогиба хотя бы в одной точке пластины. Пусть в некоторой точке S пластины $w(x_S, y_S, t)$ известно изменение прогиба во времени (например, экспериментальные данные) – задача сводится к решению системы двух интегральных уравнений Вольтерра I рода (так как неизвестных сил в этом случае будет уже две – это $P(t)$ и $R(t)$ – также неизвестная реакция между гасителем и пластиной):

$$\begin{cases} \int_0^t P(\tau) K_{DP}(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) \left[K_{DR}(t - \tau) + \frac{1}{\kappa} \right] d\tau = 0; \\ \int_0^t P(\tau) K_{SP}(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_{SR}(t - \tau) d\tau = w(x_S, y_S, t). \end{cases} \quad (4)$$

Согласно РА Тихонова производится конечномерная аппроксимация

системы интегральных уравнений (СИУ). После дискретизации в матричном виде систему (4) можно записать так:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где матрицы \mathbf{A}_{ij} отвечают соответствующим ядрам СИУ (4), вектора \mathbf{P} и \mathbf{R} соответствуют неизвестным функциям $P(t)$ и $R(t)$, а \mathbf{w}_s – известной функции $w(x_s, y_s, t)$.

Блочная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (5) решается с использованием обобщенного алгоритма (Гаусса или Крамера), а также с использованием процедуры регуляризации при обращении матриц согласно РА Тихонова. Более подробное решение подобных СЛАУ описано, например, в [4].

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. При вычислениях принимались следующие значения: $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho = 7890$ кг/м³; $h = 0,04$ м; $l = 0,6$ м; $m = 0,4$ м; $x_0 = 0,15$ м, $y_0 = 0,3$ м; $x_s = 0,25$ м, $y_s = 0,1$ м; $x_D = 0,45$ м, $y_D = 0,15$ м – координаты места установки амортизатора; коэффициент демпфирования амортизатора $\kappa = 10^5$ Н/(м/с); число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

При проведении расчетов на величины прогибов $\overline{w_s}(t)$, которые являются результатами решения прямой задачи при заданном законе изменения во времени внешней нагрузки $P(t)$, налагался «шум» в соответствии с формулой $\overline{w_s}(t) = w_s(t) + w_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t)$, где δ – относительная погрешность; w_{\max} – максимальный прогиб пластины в рассматриваемой точке, $Rnd(t)$ – случайные числа в интервале $[-1; 1]$. Укажем, что процедура «зашумления» моделирует погрешности, возникающие при реальных измерениях параметров НДС элементов конструкций.

Существенное влияние на устойчивость численного решения блочной СЛАУ (5), особенно при «зашумленной» правой части, оказывают параметры регуляризации α_i , содержащиеся в РА Тихонова. Эти параметры целесообразно брать независимыми для каждой из идентифицируемых функций, хотя они могут и совпадать – это зависит от соответствующих ядер интегральных уравнений. Они определяются на основе минимизации по α_i соответствующих функционалов невязки. Для приведенного численного расчета относительная погрешность «зашумления» принималась $\delta = 0,2$. Для этого случая параметры регуляризации целесообразно принять равными $\alpha_p = 10^{-43}$, а $\alpha_R = 10^{-44}$.

На рис. 2 показано изменение возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды) и определенная в результате решения прямой задачи реакция амортизатора $R(t)$ – жирные черные кривые. Серыми кривыми на рис. 2 показаны результаты решения обратной задачи, а именно идентифицированные значения возмущающей силы $P(t)$ и реакции амортизатора $R(t)$. Как видно из

рис. 2 идентифицированные кривые практически полностью совпадают (с исходными данными для прямой задачи), заметим, что при решении обратной задачи зависимости $P(t)$ и $R(t)$ считались неизвестными и были найдены из блочной СЛАУ (5).

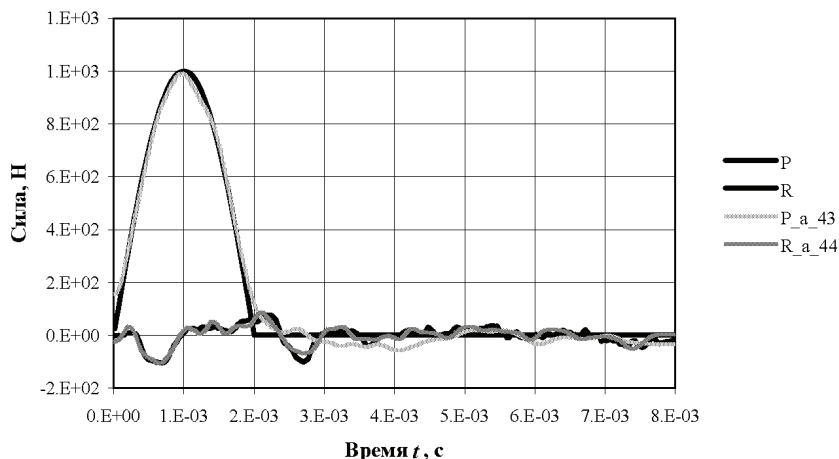


Рисунок 2 – Идентификация неизвестных нагрузок

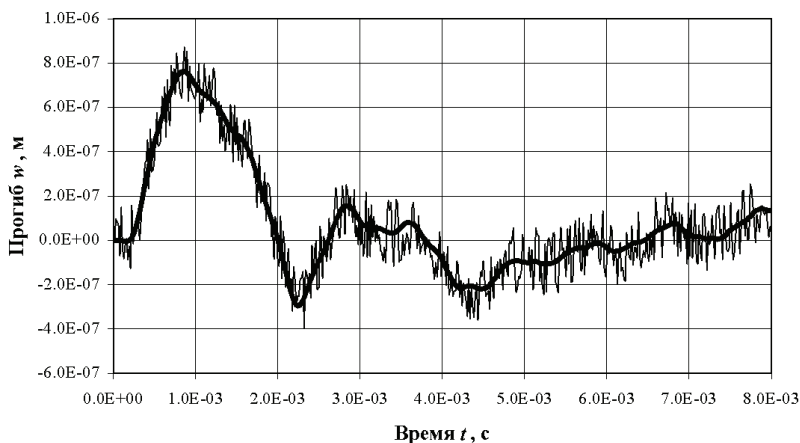


Рисунок 3 – Исходные данные идентификации

- На рис. 3 показаны две кривые изменения перемещения точки пластины:
- кривая 1 показывает изменение прогиба в некоторой точке пластины найденное при решении прямой задачи;
 - кривая 2 – исходные данные для задачи идентификации («зашумленное» изменение прогиба).

Выводы. Предложен новый подход при моделировании нестационарного деформирования прямоугольной пластины, с установленным на ней амортизатором, в виде неизвестной силы, которая прикладывается к пластине. На основе предложенного в работе подхода, имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения прямой и обратной нестационарных задач механики твердого деформируемого тела. Показана возможность идентификации неизвестной возмущающей нагрузки по «зашумленным» исходным данным, что обуславливает применимость описанной методики при экспериментальных исследованиях для реальных результатов измерений.

Список литературы: 1. *Wu S. T., Chen J.Y., Yeh Y.C., Chiu Y.Y.* An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // *Journal of Sound & Vibration*. – 300 (1-2). – 2007. – P. 250-64. 2. *Ranjan V., Ghosh M. K.* Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Journal of Thin-Walled Structures*, 2005. – Vol. 43. – P. 1513-1533. 3. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973 – 272 с. 4. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с. 5. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.

Поступила в редколлегию 17.05.2011

УДК 539.3

Н.И.ВОРОПАЙ, аспирант, ХНАДУ, Харьков

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА

Збудовано розв'язок оберненої задачі на основі розв'язку прямої задачі про дослідження нестационарних коливань пружної ізотропної середи з циліндричною порожниною. Поширення осесиметричних деформаційних хвиль зумовлено завданням переміщень на поверхні порожнини у пружному тілі. Приведено числовий приклад розрахунку оберненої задачі.

The inverse problems solution based on the direct problem of non-stationary vibrations of an elastic isotropic medium with a cylindrical cavity is considered. Distribution of axisymmetric deformation waves which are caused by displacements on the surface of an elastic body. A numerical calculations' example for the inverse problem are presented.

Построено решение обратной задачи на основе прямой задачи об исследовании нестационарных колебаний упругой изотропной среды с цилиндрической полостью. Распространение осесимметричных деформационных волн обусловлено заданием перемещений на поверхности полости в упругом теле. Представлен численный пример расчета обратной задачи.